

## CONCOURS INTERNE D'INGÉNIEUR TERRITORIAL

SESSION 2023

### ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE APPLIQUÉES

Durée : 4 heures

Coefficient : 3

**Les parties mathématiques et physique seront composées sur des copies distinctes.**

**Les candidats peuvent traiter les questions dans l'ordre qui leur convient, en indiquant bien le numéro de chaque question.**

**Si le détail des calculs (justification des résultats) n'apparaît pas sur la copie, les questions qui requièrent des calculs ne seront pas corrigées.**

#### **À LIRE ATTENTIVEMENT AVANT DE TRAITER LE SUJET :**

- ♦ Vous ne devez faire apparaître aucun signe distinctif dans votre copie, ni votre nom ou un nom fictif, ni initiales, ni votre numéro de convocation, ni le nom de votre collectivité employeur, de la commune où vous résidez ou du lieu de la salle d'examen où vous composez, ni nom de collectivité fictif non indiqué dans le sujet, ni signature ou paraphe.
- ♦ Sauf consignes particulières figurant dans le sujet, vous devez impérativement utiliser une seule et même couleur non effaçable pour écrire et/ou souligner. Seule l'encre noire ou l'encre bleue est autorisée. L'utilisation de plus d'une couleur, d'une couleur non autorisée, d'un surligneur pourra être considérée comme un signe distinctif.
- ♦ Les graphiques pourront être réalisés au crayon à papier.
- ♦ L'utilisation d'une calculatrice électronique programmable ou non-programmable sans dispositif de communication à distance est autorisée.
- ♦ Le non-respect des règles ci-dessus peut entraîner l'annulation de la copie par le jury.
- ♦ Les feuilles de brouillon ne seront en aucun cas prises en compte.

**Ce sujet comprend 11 pages.**

**Il appartient au candidat de vérifier que le document comprend le nombre de pages indiqué.**

*S'il est incomplet, en avertir le surveillant.*

## MATHEMATIQUES : 10 POINTS

### EXERCICE 1 (3 points)

Pour  $x$  et  $y$  des nombres réels on pose  $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2) + y^2 - x^2$ .

- (0.5 point) Déterminer l'ensemble  $D$  de définition de la fonction  $f$ .
- (1 point) Pour  $(x, y)$  dans  $D$  déterminer la dérivée partielle  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ .
- (0.5 point) Pour  $(x, y)$  dans  $D$  déterminer la dérivée partielle  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ .
- (1 point) Pour quelle(s) valeur(s) du réel  $\alpha$   $f$  est-elle solution sur  $D$  de l'équation :

$$x \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - y \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \alpha xy \quad ?$$

### EXERCICE 2 (2.5 points)

Lors de l'écoulement laminaire d'un fluide dans une conduite neuve, de section circulaire, la répartition de la vitesse  $v$  d'écoulement des particules satisfait à la relation :

$$v = 10^{-6} \frac{\Delta P}{4\eta\ell} (R^2 - r^2)$$

avec :

$\Delta P$  = perte de charge sur la longueur de conduite en  $Pa$ ,

$\ell$  = longueur de la conduite en  $m$ ,

$R$  = rayon du tube en  $mm$ ,

$\eta$  = coefficient de viscosité dynamique du fluide,

$r$  = distance par rapport à l'axe du tube en  $mm$ ,

$v$  = vitesse du fluide à une distance  $r$  de l'axe du tube en  $m/s$ .

Les résultats numériques des calculs seront arrondis à 3 chiffres significatifs après la virgule.

- (0.5 point) Exprimer la vitesse  $v$  en fonction de la distance  $r$ , pour un tube de rayon  $R = 7.5mm$ , dans les conditions suivantes :

$$\Delta P = 15\,000 \text{ Pa} \quad \ell = 1 \text{ m} \quad \eta = 0.036$$

- On considère la fonction  $g$  définie sur l'intervalle  $[0, 7.5]$  par :  $g(x) = -0.104x^2 + 5.86$ .

(a) (0.75 point) Déterminer une primitive  $G$  de la fonction  $g$  sur l'intervalle  $[0, 7.5]$ .

(b) (0.75 point) Calculer l'intégrale  $I = \int_0^{7.5} (-0.104x^2 + 5.86) dx$ .

(c) (0.5 point) La vitesse moyenne d'écoulement dans ce tube est donnée en  $m/s$  par la formule :

$$\mu = \frac{1}{7.5} \int_0^{7.5} (-0.104x^2 + 5.86) dx$$

Calculer cette vitesse moyenne.

### EXERCICE 3 (4.5 points)

On considère les matrices suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. (0.5 point) Calculer  $P^2$ . En déduire que  $P$  est inversible et donner  $P^{-1}$ .
2. (a) (0.25 point) Vérifier que  $A^2 - 2A = 0_2$  (matrice nulle de taille  $2 \times 2$ ).  
(b) (1 point) Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $A$  et  $X$  un vecteur propre associé. On a donc  $AX = \lambda X$  et  $X \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Vérifier que  $\lambda^2 - 2\lambda = 0$  (on pourra commencer par montrer que  $A^2X = \lambda^2X$ ).  
En déduire les valeurs propres potentielles de  $A$ .
3. (0.25 point) Montrer que  $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $V = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  sont des vecteurs propres de  $A$  (préciser les valeurs propres associées).
4. (0.5 point) Justifier que  $P^{-1}AP = C$ .
5. (0.5 point) En remarquant que  $B = I_2 + A$  et  $D = I_2 + C$  en déduire que  $P^{-1}BP = D$ .

On admet dans la suite que pour tout entier naturel  $n$  on a  $P^{-1}B^nP = D^n$ .

On pourra utiliser ce résultat sans démonstration.

6. (0.5 point) Donner les coefficients de la matrice  $D^n$ .
7. (1 point) Conclure que  $B^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^n + 1 & 3^n - 1 \\ 3^n - 1 & 3^n + 1 \end{pmatrix}$ .

## PHYSIQUE APPLIQUEE : 10 POINTS

Le barème détaillé de cette partie est précisé en page 9.

Sur un site isolé, se trouve un chalet trop éloigné du réseau électrique pour y être raccordé.

Ce chalet est équipé d'une éolienne lui permettant d'être autonome en énergie. La mairie, propriétaire, propose la fourniture de l'eau chaude pour la douche et la cuisine, de l'éclairage intérieur dans les différentes pièces du chalet et de l'éclairage extérieur aux abords du chalet.

Les quatre parties suivantes sont indépendantes.

On prendra  $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$  ; masse volumique de l'eau :  $1 \text{ kg.L}^{-1}$ .

### I. DIMENSIONNEMENT DU COMPRESSEUR HYDRAULIQUE (2,25 POINTS)

Le site dispose d'une réserve d'eau de capacité  $4 \text{ m}^3$  stockée dans une cuve, en contact avec l'air libre. ( $P_{\text{atm}} = 1013 \text{ hPa}$ ). Le compresseur met en pression cette eau dans les canalisations d'eau du gîte à la pression  $P = 3 P_{\text{atm}}$ .

En prenant en compte les besoins en eau, le compresseur doit permettre un débit maximal de 20 Litres d'eau par minute. La dénivellation maximale entre le lieu de pompage de l'eau et le lieu de distribution est de 5 mètres. La tuyauterie utilisée est du PER de 12 mm de diamètre intérieur.

- Calculer la vitesse moyenne de déplacement de l'eau dans la canalisation, en sortie du compresseur.

On considère que durant le soutirage de l'eau, le niveau d'eau dans la cuve n'évolue quasiment pas.

- En négligeant les pertes de charge, calculer la puissance mécanique de la pompe. On utilisera le théorème de Bernouilli, dont l'expression est rappelée ci-dessous :

$$P = q_v \left( \frac{1}{2} \rho \Delta v^2 + \rho g \Delta z + \Delta P \right)$$

Le moteur faisant tourner la pompe consomme une puissance électrique telle que le rendement global moteur-pompe soit égal à 35 %.

- En déduire la puissance électrique appelée par le moteur lors de ce régime de fonctionnement.

Les cuves d'eau potable, supposées parallélépipédiques, présentent un niveau d'eau à 1,5 m lorsqu'elles sont pleines (correspondant aux  $4 \text{ m}^3$ ). Afin d'avertir les utilisateurs que celles-ci sont bientôt vides, on place en fond de cuve un capteur de pression immergé. Un système électrique déclenche une alerte lorsqu'il ne reste plus que 400 Litres.

- Quelle est la pression relative mesurée par le capteur pour générer ce déclenchement ?

## II. PRODUCTION D'EAU CHAUDE (3 POINTS)

Un estivant prend une douche pour laquelle on suppose le débit constant durant  $\Delta t = 5$  min. Le volume de l'eau soutirée est alors de  $V_{\text{douche}} = 40$  Litres, à  $T_{\text{mél}} = 37^\circ\text{C}$ . L'eau chaude est à la température de  $T_{\text{chaud}} = 60^\circ\text{C}$  et l'eau froide à  $T_{\text{froid}} = 20^\circ\text{C}$ .

- a. Quel volume d'eau chaude et quel volume d'eau froide ont été soutirés pour cette douche ?

On donne ci-dessous :

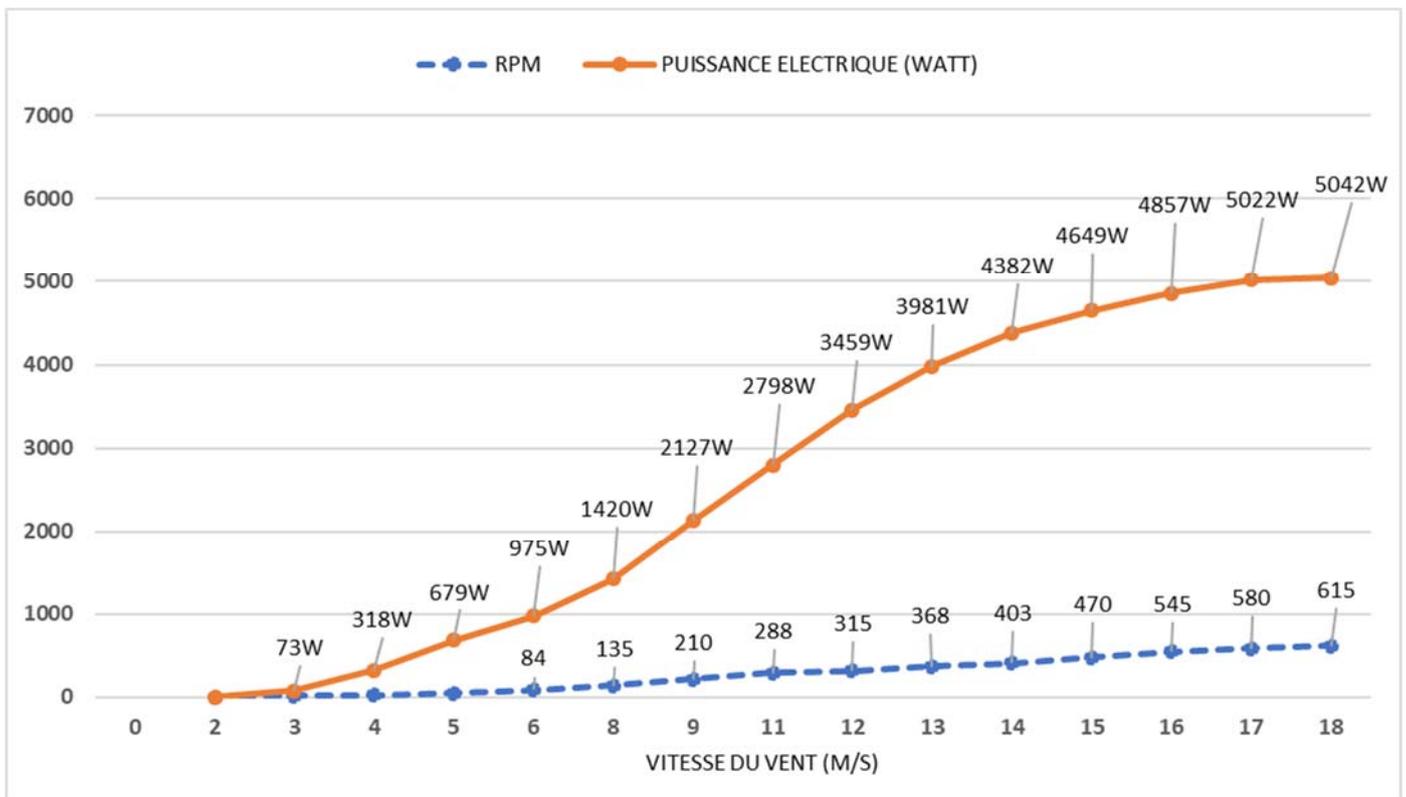
- Les caractéristiques de l'éolienne choisie pour ce site :

Éolienne à axe vertical de 4 kW à faible vibration et faible bruit.

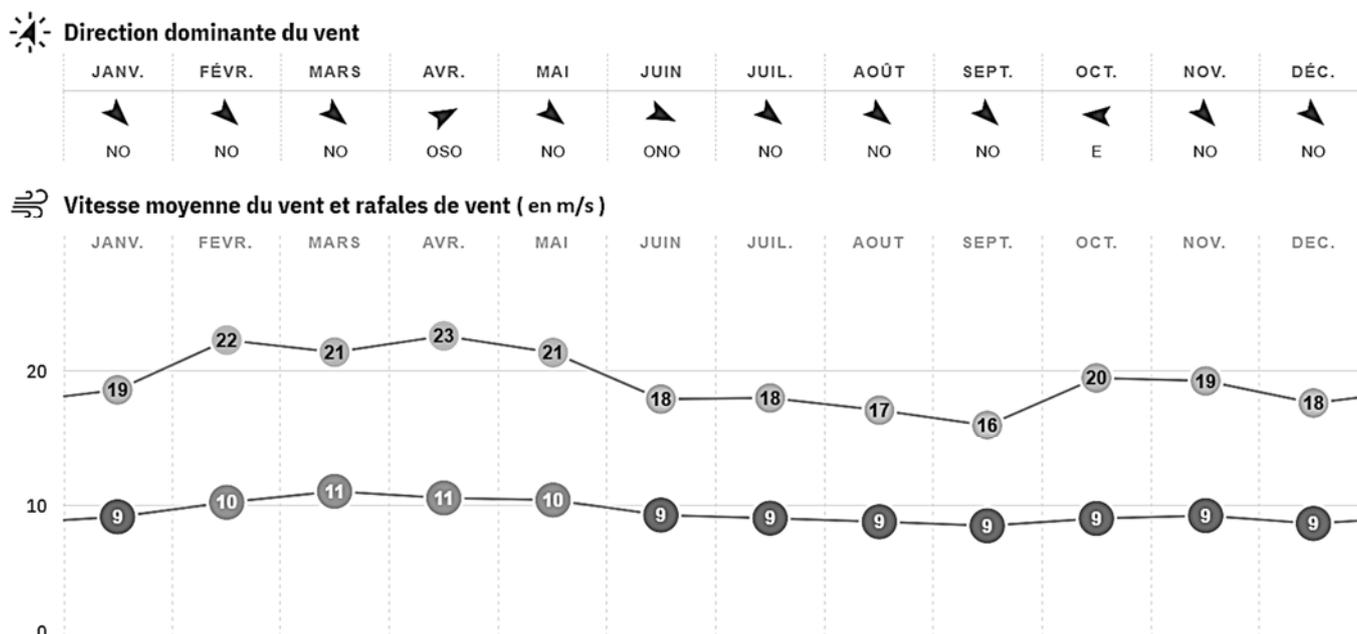
L'éolienne peut démarrer sa rotation à une vitesse du vent de 4 m/s. Mais une fois qu'il a commencé la rotation, il peut générer de l'énergie même à une vitesse de vent de 3 m/s.

L'éolienne génère une tension alternative 230 V, 50Hz, monophasée.

- Production de la puissance de l'éolienne en fonction de la vitesse du vent :



- Les statistiques mensuelles sur la direction, la vitesse en rafales et la vitesse moyenne du vent (en m/s) sur l'aérodrome de Millau, peu éloigné du site :



Pour répondre aux besoins en eau chaude du chalet (environ 300 Litres d'eau chaude par jour), deux solutions sont proposées :

- Solution 1 : Installer un seul chauffe-eau de 300 Litres
- Solution 2 : Installer deux chauffe-eaux de 150 Litres chacun.

Le document donne les caractéristiques de ces deux types de chauffe-eaux.

		150 litres	200 litres	250 litres	300 litres
Tension (V)		230 V monophasé (transformable en 400 V triphasé avec le kit Facilitri)			
Résistance		Stéatite			
Puissance (W)		1 800	2 400	3 000	3 000
Dimensions (mm)	Ø	575	575	575	575
	H	1 015	1 275	1 500	1 780
	C	590	590	590	590
Temps de chauffe réel*		4h29	4h34	5h09	6h19
Qpr (Consommation entretien)**		1,64	1,95	2,2	2,49
V40 (Quantité d'eau chaude à 40°C)		265	375	440	526
Poids à vide (kg)		40	51	63	73

\* Temps de chauffe réel pour chauffage de 15° à 65°C.

\*\* Consommation d'entretien en kWh pour 24 heures pour de l'eau à 65°C (ambiance 20°C).

On se place dans le cas le plus défavorable où les 300 Litres d'eau chaude sont intégralement consommés.

- b. A l'aide de l'ensemble des documents, donner la puissance moyenne de l'éolienne durant les mois estivaux de juin à septembre.
- c. Dans ce cas, argumenter votre choix de solution (1) ou (2).
- d. Indiquer le fonctionnement quotidien de la solution choisie, en indiquant notamment le temps de mise en chauffe de l'eau.

### III. ECLAIRAGE (2 POINTS)

Aux alentours de l'abreuvoir et du râtelier, destinés aux chevaux, ainsi que sur la zone de camping du chalet, on installe 12 spots à Led dont les caractéristiques sont indiquées ci-dessous.



50W - 4000 LUMEN  
220-240V 50/60Hz  
4000K  
LONGUEUR CABLE 30cm H05RNF\*3\*1.00mm<sup>2</sup>  
DURÉE DE VIE MOYENNE 30 000 HEURES  
IP65

L'ensemble de ces spots fonctionne non stop de 21h30 à 6h30 durant chaque nuit.

En outre, on installe également 20 spots à Led (de puissance 5 W chacun) à l'intérieur du chalet. Ces spots sont censés pouvoir fonctionner également toute la nuit, dans le scénario le plus défavorable.

Afin d'être sûr de disposer de l'énergie électrique en suffisance, les services techniques proposent d'effectuer du stockage d'énergie à l'aide de batteries.

Il s'agit de disposer de 3 nuits en autonomie d'éclairage, dans le cas où durant les trois jours consécutifs, l'éolienne ne puisse fournir l'énergie par manque de vent.

- a. Quelle énergie électrique les batteries doivent être en capacité de restituer durant ces trois nuits consécutives ? Vous exprimerez cette énergie en kWh.

Le rapport entre l'énergie électrique qu'ont à restituer les batteries dans ces conditions et l'énergie nécessaire pour les recharger est de l'ordre de 60 %.

- b. Si le vent moyen est de 9 m/s et que l'éolienne n'a aucune charge connectée, hormis les batteries, calculer le temps de recharge de ces batteries.

#### IV. FONCTIONNEMENT ELECTRIQUE (2,75 POINTS)

Le tableau ci-dessous récapitule l'ensemble des éléments électriques dont dispose le chalet :

Eléments	Puissance électrique	Facteur de puissance
1 Compresseur hydraulique :	470 W	0,85
1 cumulus	1800 W	0,95
12 spots à Led :	50 W chacun	0.75
20 spots à Led :	5 W chacun	0.4

Les batteries sont mises en charge lorsque tous ces appareils sont déconnectés de l'éolienne. Elles ne sont donc pas comptabilisées.

- Compléter le tableau situé en annexe A, permettant d'évaluer les puissances active et réactive consommées par les appareillages en fonctionnement.
- Calculer la puissance apparente consommée par l'ensemble de l'installation, puis le courant appelé.
- Calculer la capacité à placer en parallèle avec cette installation afin d'améliorer le facteur de puissance et l'amener à 1.
- A partir de quelle vitesse du vent l'ensemble des éléments recensés dans le tableau, accompagnés du condensateur, peuvent effectivement fonctionner simultanément en étant directement alimentés par l'éolienne ?

#### Liste des annexes

**Annexe A**            Tableau des puissances actives et réactives pour répondre à la question IV.a - 1page

***Attention, l'annexe A utilisée pour répondre à la question IV.a est fournie en deux exemplaires dont un est à rendre avec votre copie, même si vous n'y avez rien écrit.***

***Veillez à n'y apporter aucun signe distinctif hors de l'éventuelle zone réservée à cet effet.***

<b>BAREME PARTIE PHYSIQUE APPLIQUEE (10 POINTS)</b>		
<b>Partie I :</b>	<b>2,25 pts</b>	<b>Dimensionnement du compresseur hydraulique</b>
	a :	0,75 pt
	b :	0,5 pt
	c :	0,5 pt
	d :	0,5 pt
<b>Partie II :</b>	<b>3 pts</b>	<b>Production d'eau chaude</b>
	a :	1 pt
	b :	0,5 pt
	c :	0,75 pt
	d :	0,75 pt
<b>Partie III :</b>	<b>2 pts</b>	<b>Éclairage</b>
	a :	1 pt
	b :	1 pt
<b>Partie IV :</b>	<b>2,75 pts</b>	<b>Fonctionnement électrique</b>
	a :	1 pt
	b :	0,75 pt
	c :	0,5 pt
	d :	0,5 pt



## ANNEXE A

### TABLEAU DES PUISSANCES ACTIVES ET REACTIVES FOURNI POUR REpondre A LA QUESTION IV.A

*Cette annexe est fournie en 2 exemplaires dont un est à rendre avec la copie*

	Puissance active consommée par l'ensemble des éléments (en W)	Puissance réactive consommée par l'ensemble des éléments (en VAR)
1 Compresseur hydraulique		
1 cumulus		
12 spots à Led		
20 spots à Led		
<b>Total</b>	<b>P<sub>T</sub> = 2970 W</b>	<b>Q<sub>T</sub> = 1642 VAR</b>

Nom:

Prénom:

Date de naissance:  /  /

Numéro d'identifiant :

*cadre réservé à l'administration*



## ANNEXE A

### TABLEAU DES PUISSANCES ACTIVES ET REACTIVES FOURNI POUR REpondre A LA QUESTION IV.A

*Cette annexe est fournie en 2 exemplaires dont un est à rendre avec la copie*

	Puissance active consommée par l'ensemble des éléments (en W)	Puissance réactive consommée par l'ensemble des éléments (en VAR)
1 Compresseur hydraulique		
1 cumulus		
12 spots à Led		
20 spots à Led		
<b>Total</b>	<b>P<sub>T</sub> = 2970 W</b>	<b>Q<sub>T</sub> = 1642 VAR</b>

Nom:

Prénom:

Date de naissance:  /  /

Numéro d'identifiant:

cadre réservé à l'administration

