CONCOURS INTERNE D'INGÉNIEUR TERRITORIAL

SESSION 2021

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE APPLIQUÉES

Durée : 4 heures
Coefficient : 3

Les parties mathématiques et physique seront composées sur des copies distinctes.

Les candidats peuvent traiter les questions dans l'ordre qui leur convient, en indiquant bien le numéro de chaque question.

Si le détail des calculs (justification des résultats) n'apparaît pas sur la copie, les questions qui requièrent des calculs ne seront pas corrigées.

À LIRE ATTENTIVEMENT AVANT DE TRAITER LE SUJET :

- Vous ne devez faire apparaître aucun signe distinctif dans votre copie, ni votre nom ou un nom fictif, ni initiales, ni votre numéro de convocation, ni le nom de votre collectivité employeur, de la commune où vous résidez ou du lieu de la salle d'examen où vous composez, ni nom de collectivité fictif non indiqué dans le sujet, ni signature ou paraphe.
- Sauf consignes particulières figurant dans le sujet, vous devez impérativement utiliser une seule et même couleur non effaçable pour écrire et/ou souligner. Seule l'encre noire ou l'encre bleue est autorisée. L'utilisation de plus d'une couleur, d'une couleur non autorisée, d'un surligneur pourra être considérée comme un signe distinctif.
- Les graphiques pourront être réalisés au crayon à papier.
- L'utilisation d'une calculatrice électronique programmable ou non-programmable sans dispositif de communication à distance est autorisée.
- Le non-respect des règles ci-dessus peut entraîner l'annulation de la copie par le jury.
- Les feuilles de brouillon ne seront en aucun cas prises en compte.

Ce sujet comprend 7 pages.

Il appartient au candidat de vérifier que le document comprend le nombre de pages indiqué.
S'il est incomplet, en avertir le surveillant.

MATHÉMATIQUES : 10 points

PROBLÈME 1 (3 points)

Chacune des deux questions suivantes comporte trois propositions. Chacune de ces propositions est vraie ou fausse. Vous devez indiquer sur votre copie la lettre de la proposition avant de signaler si elle est vraie ou fausse.

Attention !
- Aucune justification n'est demandée, d'où un usage en toute liberté de la calculatrice.
- Pour chaque question, il est possible que les trois propositions soient toutes vraies ou toutes fausses ; le nombre de réponses vraies ou fausses est variable selon les questions.
- A chaque réponse correcte est attribué 0,5 point.

Question 1, à propos de la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \ln(2x+3) - x$

A : La fonction f est croissante, sur $[0\ ;\ +\infty[$.

B : Le nombre dérivé $f'(1)$ vaut $-0,6$.

C : Un arrondi au centième près de l'intégrale $\int_0^1 f(x)dx$ est 0,87.

Question 2, à propos de la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 0,8u_n + 2 \text{ pour tout entier naturel } n \end{cases}$.

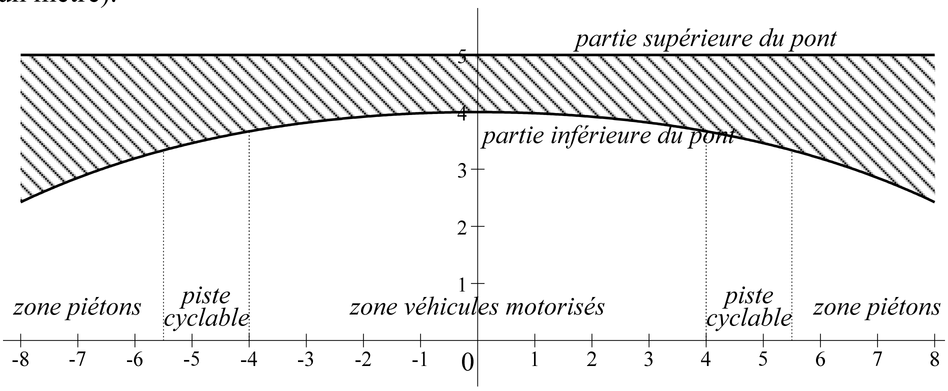
D : Tous les termes de la suite (u_n) sont positifs.

E : $a_4 = \dfrac{3946}{625}$.

F : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

PROBLÈME 2 (3,5 points)

Un pont, d'une seule arche de longueur 16 mètres, enjambe une route à double circulation. La partie supérieure de ce pont est à 5 mètres au-dessus du niveau de la route. Dans un repère orthonormé, la figure ci-dessous représente une vue d'une des deux façades de ce pont (une unité graphique représente un mètre).



La partie de l'axe des abscisses comprises entre -8 et 8 représente la chaussée sur laquelle sont délimitées les zones de circulation des piétons, des cyclistes et des véhicules motorisés.
La partie inférieure du pont est la courbe représentative C d'une fonction f définie sur $[-8 ; 8]$ par :

$$f(x) = a - \frac{e^{0,2x} + e^{-0,2x}}{2}$$

où a est un nombre réel encore inconnu.
On sait que la courbe C passe par le point de coordonnées $(0 ; 4)$.

Question 1 (0,75 point)

1a. Montrer que $a = 5$. (0,5 point)
1b. Quelle est la propriété de la fonction f qui correspond à la symétrie de la partie inférieure du pont par rapport à l'axe des ordonnées ? (0,25 point)

Question 2 (1 point)

On note f' la fonction dérivée de f.

2a. Montrer que $f'(x) = \frac{1}{10}e^{-0,2x}(1 - e^{0,4x})$. (0,5 point)

2b. Justifier que la fonction f est décroissante sur l'intervalle $[0 ; 8]$. (0,5 point)

Question 3 (0,75 point)

Un camion de 2,5 mètres de largeur doit passer sous le pont au milieu de la file de droite de la zone des véhicules motorisés. Quelle doit être la hauteur maximale de ce camion sachant que l'on doit laisser une hauteur de sécurité minimale de 50 cm au-dessus du camion ? La réponse sera arrondie au centimètre près.

Question 4 (1 point)

On veut peindre les deux façades de ce pont.

4a. Montrer que $\int_0^8 (e^{0,2x} + e^{-0,2x})dx = 5(e^{1,6} - e^{-1,6})$.

En déduire que l'aire de la surface à peindre est d'environ 47,51 m^2. (0,75 point)

4b. La peinture utilisée pour peindre les façades de ce pont est vendue par bidon de 30 litres. Sachant que cette peinture a une propriété de recouvrement de 0,3 mètre carré par litre et qu'il faut deux couches de peinture, combien de bidons au minimum sont nécessaires ? (0,25 point)

PROBLÈME 3 (3,5 points)

Rappels
Pour un triangle ABC quelconque dont les longueurs des côtés et les mesures des angles sont notées :
$\mathrm{BC}=a,\ \mathrm{AC}=b,\ \mathrm{AB}=c,\ \widehat{\mathrm{BAC}}=\hat{\mathrm{A}},\ \widehat{\mathrm{ABC}}=\hat{\mathrm{B}},\ \widehat{\mathrm{ACB}}=\hat{\mathrm{C}}$, on a :

- $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\left(\hat{\mathrm{A}}\right)$; c'est la formule d'Al-Kashi
- $\dfrac{a}{\sin\left(\hat{\mathrm{A}}\right)}=\dfrac{b}{\sin\left(\hat{\mathrm{B}}\right)}=\dfrac{c}{\sin\left(\hat{\mathrm{C}}\right)}$; c'est la loi des sinus.

On considère un triangle ABC de mesures $\mathrm{BC}=7,\ \mathrm{AC}=6,\ \mathrm{AB}=5$.

Question 1 (1 point)

1a. Montrer que $\cos\left(\hat{\mathrm{A}}\right)=\dfrac{1}{5}$ et $\cos\left(\hat{\mathrm{B}}\right)=\dfrac{19}{35}$. (0,75 point)

1b. En déduire $\sin\left(\hat{\mathrm{A}}\right)$ et $\sin\left(\hat{\mathrm{B}}\right)$. (0,25 point)

Question 2 (1,5 point)

La bissectrice de l'angle $\hat{\mathrm{C}}$ coupe le côté $[\mathrm{AB}]$ au point I (les deux angles $\widehat{\mathrm{BCI}}$ et $\widehat{\mathrm{ACI}}$ sont égaux).

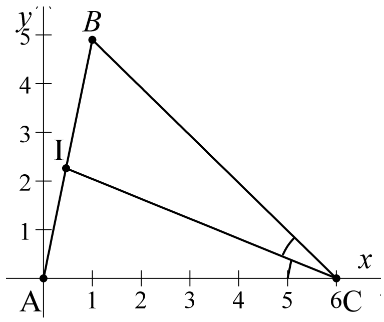
2a. En utilisant deux fois la loi des sinus, une fois pour le triangle ACI et une fois pour le triangle BCI, montrer que $\dfrac{\mathrm{AI}}{\mathrm{BI}}=\dfrac{6}{7}$. (0,75 point)

2b. Donner $\mathrm{AI}+\mathrm{BI}$. En déduire AI et BI. (0,5 point)

2c. Calculer CI. (0,25 point)

Question 3 (1 point)

Le triangle ABC est disposé dans un repère orthonormé du plan comme indiqué sur la figure ci-dessous :



Calculer les coordonnées de B, les coordonnées de I, l'aire du triangle ABC et la valeur du rapport $\dfrac{\text{aire de AIC}}{\text{aire de BIC}}$.

PHYSIQUE APPLIQUEE : 10 points

L'ensemble de l'épreuve porte sur le dimensionnement d'une station de pompage anti-crue. Les 3 problèmes sont indépendants.

1. ELECTRICITE (5 points)

Dans le cadre de la protection des riverains contre la montée des eaux en période de crue, une station de pompage a pour rôle de relever les eaux du réseau pluvial pour les évacuer vers le fleuve.

Cette station est équipée de 3 pompes alimentées par le réseau de distribution publique 400V/230V 50 Hz. L'ouvrage comporte également d'autres équipements électriques (voir tableau).

a. Déterminez la puissance électrique consommée par chaque pompe, en déduire la puissance réactive. (1 point)

b. A partir de la puissance réactive de la batterie de condensateurs, en déduire la valeur de la capacité selon les 2 modes de couplage Δ / Y puis le courant traversant un condensateur ; quel est selon vous le couplage le plus approprié ? justifiez votre réponse. (2 points)

c. Etablir le bilan de puissance de l'installation ; en déduire le facteur de puissance global de l'installation. (2 points)

Equipements	**Caractéristiques**
Electropompe	HMT = 5m Débit Q = 2m^3/s rendement pompe moteur r = 0,5 Moteur pompe cosφ = 0,9 ρ_{eau} = 1000 kg/m^3 g = 9,81 m/s^2
Ventilation	P = 20KW cosφ = 0,8
Chauffage (résistif)	10kW
Eclairage	S=3KVA cosφ = 0,9
Batterie de condensateurs	Q=250 KVAR

2. ENERGIE (3 points)

Pour pallier toute défaillance du réseau de distribution électrique, on décide d'équiper la station anti crue d'un groupe électrogène capable de fournir une puissance de 650kW à pleine charge sous une tension triphasée 400/230 V 50Hz.

a. Déterminez la consommation du groupe électrogène après 12h de fonctionnement à pleine charge. (1 point)

b. Déterminez le volume de la cuve pour alimenter la station pendant 2j 24h/24. (1 point)

c. Calculez le coût pour remplir la cuve sachant que le prix d'un litre de gazole est estimé à 1,3 euros. (1 point)

Données numériques :

- Masse volumique du gazole 833 $kg.m^{-3}$.
- PCI du gazole = 42 $MJ.kg^{-1}$
- $R_{\text{alternateur moteur diésel}} = 0,5$

3. HYDRAULIQUE (2 points)

Le groupe électrogène de la station est équipé d'une cuve journalière de 500L à simple enveloppe.

Comme l'impose la règlementation, cette cuve repose sur un bac de rétention, afin de prévenir tout risque de pollution.

Accidentellement, un trou de 2cm de diamètre a été percé sur une paroi de la cuve (voir figure 1) en conséquence une fuite de gazole se déverse dans le bac.

a. En considérant que la vitesse au point A varie très peu, calculez la vitesse du jet de gazole notée Vb en sortie de l'orifice. (1 point)

b. Afin de détecter la présence de gazole dans le bac de rétention, un dispositif basé sur un détecteur résistif a été installé au fond du bac pour déclencher une alarme dès que la présence de gazole atteint un niveau de 50mm.

   En considérant un débit de fuite constant, déterminer au bout de combien de temps l'exploitant sera prévenu par la présence de gazole dans le bac. (1 point)

$g = 9,81\ m/s^2$

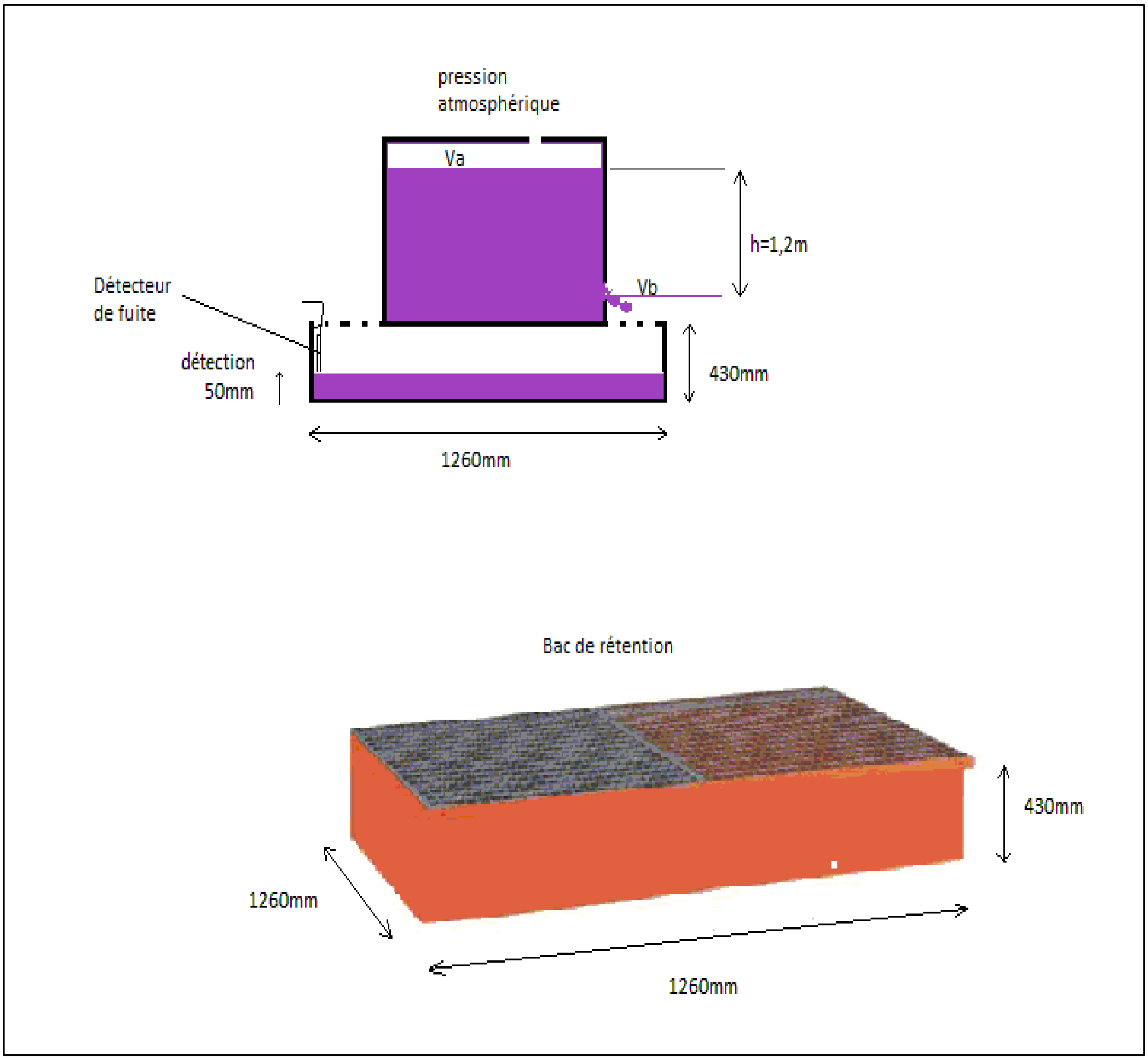

pression
atmosphérique
Va
h=1,2m
Vb
Détecteur
de fuite
détection
50mm
430mm
1260mm
Bac de rétention
430mm
1260mm
1260mm

Figure 1