Sujet élaboré par une cellule pédagogique nationale

CONCOURS INTERNE D'INGÉNIEUR TERRITORIAL

SESSION 2025

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE APPLIQUÉES

Durée : 4 heures
Coefficient : 3

Les parties mathématiques et physique seront composées sur des copies distinctes.

Les candidats peuvent traiter les questions dans l'ordre qui leur convient, en indiquant bien le numéro de chaque question.

Si le détail des calculs (justification des résultats) n'apparaît pas sur la copie, les questions qui requièrent des calculs ne seront pas corrigées.

À LIRE ATTENTIVEMENT AVANT DE TRAITER LE SUJET :

- Vous ne devez faire apparaître aucun signe distinctif dans votre copie, ni votre nom ou un nom fictif, ni initiales, ni votre numéro de convocation, ni le nom de votre collectivité employeur, de la commune où vous résidez ou du lieu de la salle d'examen où vous composez, ni nom de collectivité fictif non indiqué dans le sujet, ni signature ou paraphe.
- Sauf consignes particulières figurant dans le sujet, vous devez impérativement utiliser une seule et même couleur non effaçable pour écrire et/ou souligner. Seule l'encre noire ou l'encre bleue est autorisée. L'utilisation de plus d'une couleur, d'une couleur non autorisée, d'un surligneur pourra être considérée comme un signe distinctif.
- Les graphiques pourront être réalisés au crayon à papier.
- L'utilisation d'une calculatrice électronique programmable ou non-programmable sans dispositif de communication à distance est autorisée.
- Le non-respect des règles ci-dessus peut entraîner l'annulation de la copie par le jury.
- Les feuilles de brouillon ne seront en aucun cas prises en compte.

Ce sujet comprend 8 pages.

Il appartient au candidat de vérifier que le document comprend le nombre de pages indiqué.
S'il est incomplet, en avertir le surveillant.

MATHÉMATIQUES : 10 points

Exercice 1 : (7 points)

Partie A (4 points) :

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $g(x) = x^2 - 1 + 3\ln x$

1) Calculer $g(1)$ et les limites de g en 0 et en $+\infty$.

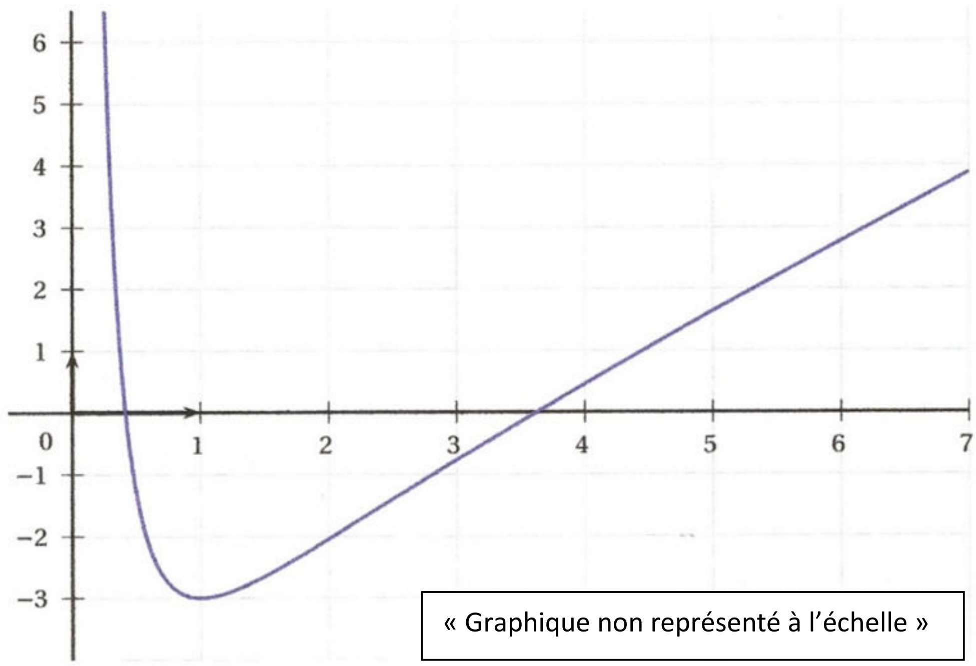
2) Calculer $g'(x)$ et établir le tableau de variations de g.

3) En déduire le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f(x) = x - 2 - \dfrac{2 + 3\ln x}{x}$

La représentation graphique de la fonction f est donnée ci - dessous :

Le repère est orthogonal d'unité 2 cm en abscisses et 1 cm en ordonnées.



4) Montrer que pour tout réel $x > 0$ on a : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$

En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

5) Le graphique montre que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β.

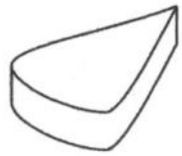
Justifier par le calcul l'encadrement : $0,412 < \alpha < 0,413$.

Partie B (3 points) :

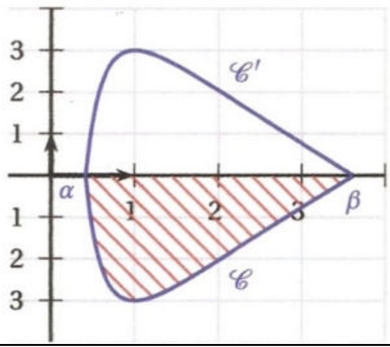
Dans cette partie, les calculs seront effectués avec les valeurs approchées à 10^{-2} près de α et β suivantes :

$$\alpha \approx 0{,}41 \text{ et } \beta \approx 3{,}62$$

Le chef de la cuisine centrale souhaite réaliser des palets en chocolat en forme de goutte d'eau. (voir schéma ci-contre)



Pour obtenir la forme de la goutte, on considère la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f restreinte à l'intervalle $[\alpha\,;\beta]$ ainsi que son symétrique $\mathscr{C}'$ par rapport à l'axe des abscisses. (voir schéma ci-dessous).



« Graphique non représenté à l'échelle »

1) On pose $\mathrm{u}(x) = \dfrac{3}{2}(\ln x)^2$. Calculer la dérivée $\mathrm{u}'(x)$.

En déduire une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

2) On rappelle qu'une unité d'aire correspond à 2 cm^2.

Calculer l'aire de la partie supérieure d'un palet en cm^2. Donner une valeur approchée 10^{-2} près.

3) Chaque palet a une épaisseur de 5 mm. Calculer, à 10^{-2} près, le volume d'un palet.

4) Pour correspondre au budget annoncé, le chef de la cuisine centrale doit pouvoir fabriquer 80 palets avec 1 litre de pâte au chocolat.

Cette fabrication est-elle conforme au budget prévu ? (Justifier la réponse)

Exercice 2 : (3 points)

On note $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices d'ordre 2 à coefficients réels.
On note $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Enfin on note $\mathcal{C}$ la partie de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par :

$$\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \qquad AM = MA\}$$

Partie A (2 points) :

1) Calculer A^2.
2) En déduire que la matrice A est inversible et calculer son inverse.
3) La matrice A est-elle diagonalisable ?
4) Démontrer que $\mathcal{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Partie B (1 point) :

1) Résoudre l'équation $AM = MA$ d'inconnue $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2) Montrer que (I_2, A) est une base de $\mathcal{C}$.
3) En déduire la dimension du sous-espace vectoriel $\mathcal{C}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

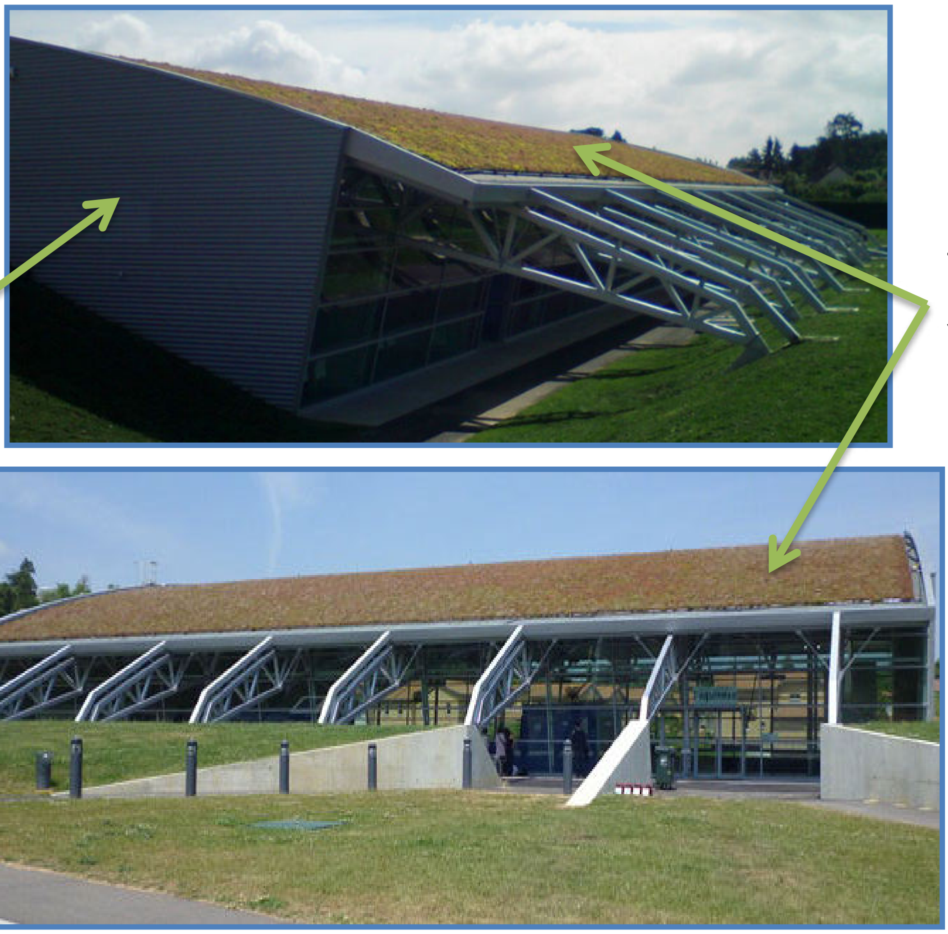
Barème Partie Mathématiques

Exercice 1 :	**7 points**
Partie A :	**4 points**
Question A1 : Question A2 : Question A3 : Question A4 : Question A5 :	0,75 point 0,75 point 0,75 point 0,75 point 1 point
Partie B :	**3 points**
Question B1 : Question B2 : Question B3 Question B4 :	0,75 point 0,75 point 0,5 point 1 point
Exercice 2 :	**3 points**
Partie A :	**2 points**
Question A1 : Question A2 : Question A3 : Question A4 :	0,5 point 0,5 point 0,5 point 0,5 point
Partie B :	**1 point**
Question B1 : Question B2 : Question B3 :	0,5 point 0,25 point 0,25 point

PHYSIQUE APPLIQUÉE : 10 points

Présentation

Dans le cadre d'une rénovation d'un ensemble sportif (un gymnase), une collectivité souhaite être en phase avec la réglementation thermique en vigueur en isolant par l'extérieur deux de ses façades et rentrer dans un processus de valorisation environnementale en installant une toiture végétalisée.



Nous allons travailler sur 3 problématiques **différentes** et **indépendantes** :

<u>Problème n°1 (4 points)</u>

<u>ISOLATION THERMIQUE PAR L'EXTÉRIEUR</u>

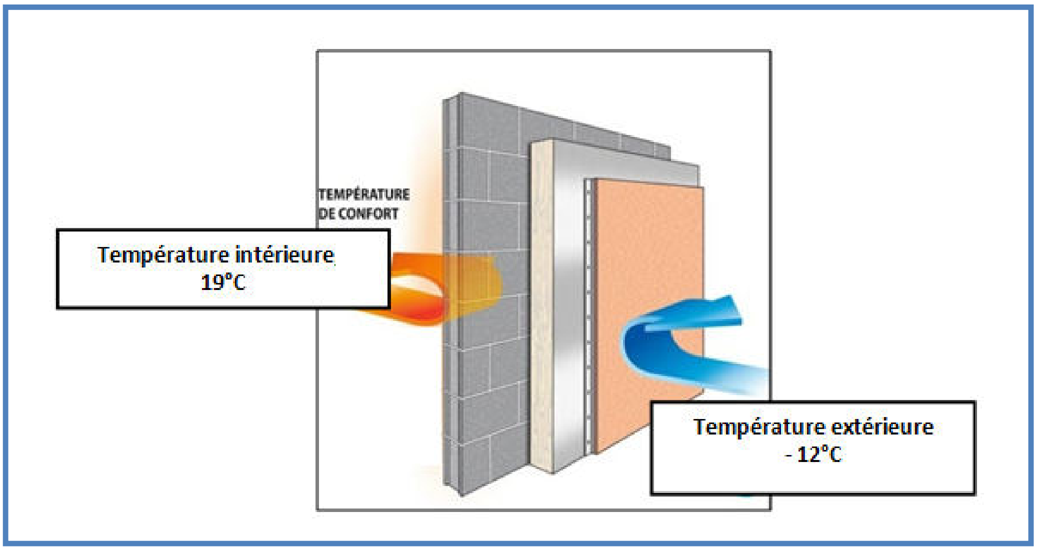
Dans le cadre de la rénovation du gymnase, la collectivité décide de se mettre en accord avec la réglementation thermique **RT 2020 : des bâtiments à énergie positive.**

Initialement, deux murs en béton, un mur sans ouverture côté nord et un autre similaire côté sud, séparaient l'intérieur de l'extérieur. La température du milieu intérieur est de 19 °C. La température du milieu extérieur est de -12°C dans le cas le plus défavorable (source météo France).

Pour renforcer thermiquement ces deux parois, on est amené à placer des matériaux isolants, côté extérieur. L'objectif de cette partie est de vérifier la rentabilité et donc la pertinence d'une telle rénovation.

Les éléments de paroi sont considérés en série. On rappelle :

- la résistance thermique de conduction surfacique $R_{cd} = \frac{e}{\lambda}$
- la résistance thermique de convection surfacique $R_{cv} = \frac{1}{h}$
- le flux thermique en fonction de R la résistance thermique $\phi = \frac{\Delta T}{R}$



Données pour l'isolation extérieure :

De l'intérieur vers l'extérieur, les matériaux sont les suivants :

- béton d'épaisseur 20 cm et de conductivité thermique λ_{beton} = 1,35 W.m^{-1}.K^{-1}
- polystyrène d'épaisseur 10 cm et de conductivité thermique $\lambda_{polystyrène}$ = 0,035 W.m^{-1}.K^{-1}
- enduit ciment projeté de 1,5 cm d'épaisseur et de conductivité thermique λ_{enduit} = 1,16 W.m^{-1}.K^{-1}

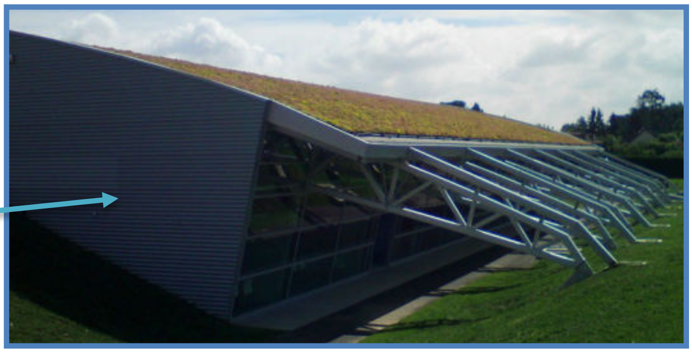
1- Calculer la résistance thermique du mur avant rénovation et après rénovation.

On adoptera h1 = 8,13 W.m^{-2}.K^{-1} pour tous les coefficients globaux de convection et rayonnement entre l'air et le béton, et h2 = 6,55 W.m^{-2}.K^{-1} pour tous les coefficients globaux de convection et rayonnement entre l'air et l'enduit de ciment.

2- Calculer les températures des différentes faces du mur et de son isolation (uniquement après rénovation).

3- Calculer le flux thermique par mètre carré avant et après rénovation.

Pour des raisons de simplification, nous allons assimiler les deux murs à isoler comme des rectangles de 14 m de hauteur et de 36 m de longueur.



Le prix moyen du kW.h est estimé à 0,225 € HT. Il y a **deux** façades à rénover. Selon l'Agence nationale de l'habitat (ANAH), le coût moyen des travaux d'**isolation extérieure** pour les murs est compris entre **180 et 230 euros HT par m²** fourniture et pose comprises. On se placera dans le cas le plus **défavorable**, à savoir pour un **coût maximum**. On considère une période hivernale allant du 1er novembre au 31 mars (29 jours en février).

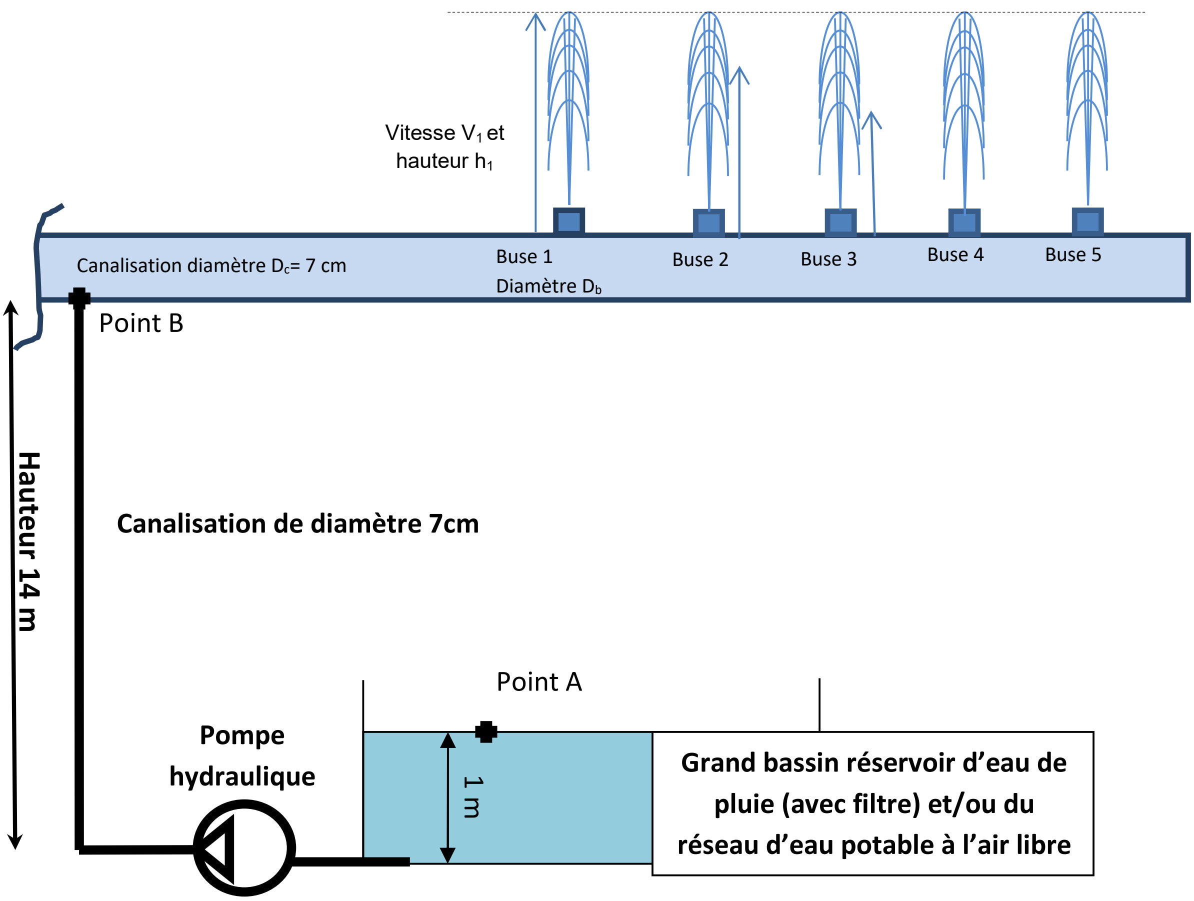
4 Calculer les déperditions thermiques (en W) avant rénovation et après rénovation sur ces deux murs.

Problème n°2 (4 points)

ARROSAGE DE LA TOITURE VÉGÉTALISÉE

Pour contribuer à une rénovation en tenant compte de l'aspect environnemental, il a été décidé de créer une toiture végétalisée. En période estivale, il est donc nécessaire de procéder à l'arrosage de cette toiture tout en donnant un aspect « esthétique et ludique » à cet arrosage en créant 5 fontaines visibles de l'extérieur à la manière des jets d'eau sur un parvis. L'eau pourra ainsi irriguer la toiture végétalisée par écoulement gravitationnel.

L'objectif de cette partie est de dimensionner la pompe hydraulique permettant le bon fonctionnement de ces 5 jets d'eau identiques.



Les 5 jets d'eau atteignent des hauteurs identiques (h_1=5m), et sont considérés comme parfaitement verticaux (pour simplifier nos calculs). L'ensemble est alimenté par une électropompe triphasée branchée sur le réseau (400V-50Hz), de facteur de puissance 0,88 et de rendement optimal 91%. Elle fournit une pression de 3 bars. On néglige les pertes de charge et les frottements sur toute la canalisation. On néglige la résistance de l'air. La canalisation ainsi que les 5 buses ont une forme parfaitement cylindrique.

1- ***Calculer la vitesse à la base de buse 1 : V_1 . Justifier en quelques mots que la vitesse en sortie de chaque buse est identique.***

2- ***Calculer le débit volumique (supposé constant) de la pompe en l/mn (litres par minute).***

3- ***En déduire le diamètre des buses que l'on considérera comme identiques.***

Données complémentaires :

- On donne la masse volumique de l'eau (pluie ou potable) ρ_{eau} = 1000 kg.m^{-3}.
- On adoptera comme valeur de l'accélération de la pesanteur g = 9,81 m.s^{-2}.
- La pression atmosphérique notée p_{atm} sera prise égale à 1,013 10^5 Pa.
- Le fluide est considéré comme incompressible.

Problème n°3 (2 points)

CONSOMMATION ÉLECTRIQUE

En plus de la station de pompage qui est composée de l'électropompe étudiée précédemment (problème n°2), d'une puissance hydraulique que l'on prendra à 3kW quel que soit le résultat trouvé précédemment (on rappelle que cette électropompe est alimentée en triphasée branchée sur le réseau (400V-50Hz), de facteur de puissance 0,88 et de rendement optimal 91%), l'installation dispose également, pour les besoins auxiliaires, d'une distribution triphasée consommant une puissance active de 12kW avec un facteur de puissance de 0,80. Enfin, le système d'éclairage alimenté en monophasé (230V-50Hz) comporte 60 lampes purement résistives de 100W chacune.

Pour simplifier, on fera l'hypothèse qu'il s'agit d'un réseau équilibré sous un régime sinusoïdal parfaitement linéaire (pour cela, on suppose que 20 lampes sont branchées sur chaque phase du réseau triphasé).

1- ***Calculer les puissances totales active, réactive et apparente consommées par l'ensemble fonctionnant simultanément.***

2- ***En déduire le facteur de puissance de l'installation.***

3- ***On désire relever ce facteur de puissance à 0,95. Calculer la capacité de la batterie de condensateurs à mettre en place en mode de couplage triangle.***

Barème Partie Physique

Problème 1 :	**4 points**
Question 1-1 : Question 1-2 : Question 1-3 : Question 1-4 :	1 point 1 point 1,5 point 0,5 point
Problème 2 :	**4 points**
Question 2-1 : Question 2-2 : Question 2-3 :	1 point 1 point 2 points
Problème 3 :	**2 points**
Question 3-1 : Question 3-2 : Question 3-3 :	1 point 0,25 point 0,75 point